พื้นฐานการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

(Basic Mathematical Proofs)

รองศาสตราจารย์กอบกุล สังขะมัลลิก[1]

Associate Professor Gobgul Sangkamallig[1]

บทคัดย่อ

การพิสูจน์ทฤษฎีบทคณิตศาสตร์ในรูป “p $\rightarrow$ q” ซึ่งเป็นข้อความมีเงื่อนไข “ถ้า p แล้ว q” (p implies q) มีรูปแบบการมีรูปแบบวิธีพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกัน คือ การพิสูจน์ทางตรงและการพิสูจน์ทางอ้อมการพิสูจน์ทางตรงหรือการพิสูจน์โดยการสร้างเป็นการพิสูจน์ข้อความ “p $\rightarrow$ q” ว่าเป็นจริงโดยกำหนดให้ p เป็นจริงและใช้ p สมมุติฐานพิสูจน์เพื่อแสดงว่า q เป็นจริง การพิสูจน์ทางอ้อมประกอบด้วย วิธีพิสูจน์แบบแย้งสลับที่คือการพิสูจน์ “q $\rightarrow$ p” ซึ่งเป็นข้อความที่สมมูลกันและอาศัยกระบวนการของการพิสูจน์ทางตรง “p $\rightarrow$ q” การพิสูจน์ทางอ้อมอีกแบบหนึ่งคือการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นการพิสูจน์ข้อความ “p $\rightarrow$ q” ว่าเป็นจริงโดยกำหนดให้ p เป็นจริงแต่ q เป็นเท็จและนำ p และ q ที่เป็นจริงพิสูจน์จนเกิดข้อขัดแย้ง (contradiction)

คำสำคัญ การพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์ทางอ้อม การพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ABSTRACT

When one wants to prove mathematical statements in the form of “p implies q”, there are some relevant techniques to prove. The first is direct proof and the other is indirect proof. Direct proof or prove by construction is a basic approach to prove “p $\rightarrow$ q” by assuming p is true and then use p to show that q must be true. The components of indirect proof are contrapositive proof and proved by contradiction.Contrapositive proofis a proof of “q $\rightarrow$ p” which equivalences to “p $\rightarrow$ q” by using the direct proof approach.Contradiction proof is a proof of “p $\rightarrow$ q” by assuming that p is true but q is not true and then use “p and q” to demonstrate a contradiction.

Keywords : Direct proof, Indirect proof, Contrapositive Proof, Contradiction Proof

[1]อาจารย์ประจำคณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ในพระบรมราชูปถัมภ์

บทนำ

การศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษาผู้ศึกษามักจะพบปัญหาว่า เมื่อใดข้อความทางคณิตศาสตร์ที่พบเห็นนั้นจะเป็นจริงหรือเท็จและจะมีวิธีใดบ้างที่จะหาข้อสรุปและพิสูจน์ข้อความนั้นๆ ผู้ศึกษาควรทำความเข้าใจธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่มีโครงสร้างคณิตศาสตร์ (Mathematical Structures) ประกอบด้วยตัวทฤษฎีบท (Theorems) เป็นข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สามารถแสดงได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จโดยการพิสูจน์ (proofs) ความหมายการพิสูจน์คือกระบวนการเรียงร้อยข้อความ (Arguments) จากข้อสมมุติฐานหรือเหตุที่กำหนดให้ผสมผสานกับข้อความ อนิยาม (Undefined terms) นิยาม (Defined terms) สัจพจน์ (Axioms or Postulates) ตลอดจนทฤษฎีบทเบื้องต้นที่ได้รับการพิสูจน์แล้ว ทำการพิสูจน์เพื่อหาข้อสรุป โดยอาศัยกฎการอ้างอิง (Rules of Inferential) ที่สมเหตุสมผลทางตรรกศาสตร์ จนได้เป็นตัวบททฤษฎีใหม่ซึ่งข้อเขียนนี้จะได้กล่าวถึงรูปแบบพื้นฐานการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่พบเห็นและใช้กันมาก เป็นกลุ่มการพิสูจน์ที่มีความคล้ายคลึงกันและเป็นทางเลือกของกันได้ก่อนจะกล่าวถึงการพิสูจน์จะขอกล่าวถึงสัญลักษณ์ที่ใช้ในการพิสูจน์ดังนี้สัญลักษณ์ p, q แทนประพจน์เป็นข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง ตัวเชื่อมของประพจน์มี 5 แบบ คือ "$\sqcup$ แทนนิเสธ", "$\wedge$ แทนและ", "$\vee$ แทนหรือ", "$\rightarrow$ แทนถ้า...แล้ว...", "$\leftrightarrow$ แทน...ก็ต่อเมื่อ..." และข้อความที่แสดงเป็นตัวอย่างการพิสูจน์แต่ละรูปแบบนั้นจะนำเสนอพร้อมโครงสร้างคณิตศาสตร์และเน้นตัวอย่างเนื้อหาคณิตศาสตร์ของระดับปริญญาตรี

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proofs)

เป็นวิธีพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เขียนในรูป "p $\rightarrow$ q" โดยมีหลักการว่าข้อความ "p $\rightarrow$ q" เป็นเท็จเมื่อข้อความเหตุ p เป็นจริงและข้อความผล q เป็นเท็จ ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า "p $\rightarrow$ q" เป็นจริงจึงแสดงเพียงว่า q เป็นจริงเมื่อ p เป็นจริงซึ่งมีกระบวนการดังนี้

ขั้นตอนการพิสูจน์ข้อความ "p $\rightarrow$ q"

1. สมมุติว่า p เป็นจริง

2. จากเหตุ p ที่เป็นจริง นำทฤษฎีเบื้องต้นที่เกี่ยวข้อง นิยาม สัจพจน์ ดำเนินการพิสูจน์ จนได้ข้อสรุปว่า q เป็นจริง

3. สรุปว่า ข้อความ q เป็นจริง ถ้าข้อความ q เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 1

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ "สำหรับจำนวนจริง a,b,c ใดๆ ถ้า $a<b$ และ $b<c$ แล้ว $a<c$" นิยาม

1.1 "สำหรับจำนวนจริง a,b ใดๆ $a<b$ หรือ $(b>a)$ ก็ต่อเมื่อ $b-a$ เป็นจำนวนจริงบวก

สัจพจน์ 1.1 สมบัติปิดการบวก $\forall a,b\in R,(a+b)\in R$

สัจพจน์ 1.2 สมบัติผกผันการบวก $\forall a\in R$ จะมี $-a\in R$ ซึ่ง $a+(-a)=0$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $a<b$	1.กำหนดให้
2. $(b-a)\in R^+$	2.นิยาม 1.1
3. $b<c$	3.กำหนดให้
4. $(c-b)\in R^+$	4.นิยาม 1.1
5. $(c-b)+(b-a)\in R^+$	5.สมบัติปิดการบวกจำนวนจริง
6.แต่ $(c-a)+(-b+b)=(c-a)\in R^+$	6.สมบัติเปลี่ยนกลุ่มและผกผันการบวก
7.นั่นคือ $a<c$	7.นิยาม1.1

ข้อสรุปคือ "ถ้า $a<b$ และ $b<c$ แล้ว $a<c$" สำหรับจำนวนจริง a,b,c ใดๆ

2. การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proofs)

การพิสูจน์ทางอ้อม เป็นการพิสูจน์ข้อความ "p $\rightarrow$ q" โดยอาศัยข้อความอื่นที่สมมูลกับ "p $\rightarrow$ q" ในที่นี้จะกล่าวถึง 2 รูปแบบคือ

2.1 การพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ (Contrapositive Proofs)

บางครั้งการพิสูจน์ทางตรงอาจกระทำได้ไม่ค่อยสะดวกจึงอาศัยสมบัติความสมมูลของประพจน์และสัจนิรันดร์ (p $\rightarrow$ q)$\leftrightarrow$(q $\rightarrow$ p) พิสูจน์ข้อความ q $\rightarrow$ p แทนข้อความ"p $\rightarrow$ q"

ขั้นตอนการพิสูจน์ ข้อความ "q $\rightarrow$ p"

1. สมมุติว่า q เป็นจริง จากเหตุ q ที่เป็นจริง นำทฤษฎีเบื้องต้นที่เกี่ยวข้อง นิยาม สัจพจน์ ดำเนินการพิสูจน์ จนได้ข้อสรุปว่า p เป็นจริง

2. นั่นคือ ข้อความ q เป็นจริง ถ้าข้อความ p เป็นจริง

3. สรุปว่า ถ้าข้อความ p เป็นจริง แล้วข้อความ q เป็นจริง

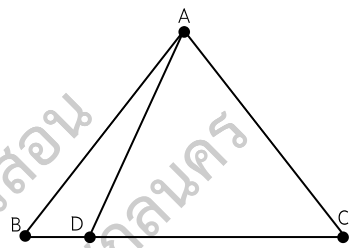
ตัวอย่างที่ 2

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์"ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆและมี $\angle A < \angle B$ แล้ว $BC < AC$" (หรือด้านยาวของรูปสามเหลี่ยมอยู่จะตรงข้ามมุมที่ใหญ่) แทนด้วย "$p \rightarrow q$" ข้อความแย้งสลับที่คือ "ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆและมี $BC > AC$ แล้ว $\angle A > \angle B$ แทนด้วย "q $\rightarrow$ p"

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

(1) "เป็นสามเหลี่ยมใดๆ เมื่อต่อด้านใดด้านหนึ่งออกไป มุมภายนอกจะใหญ่กว่ามุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด"

(2) เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มุมที่ฐานย่อมเท่ากัน



สิ่งที่ต้องสร้าง สร้างจุด บนด้าน ที่ทำให้ และ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. "ΔABC มีด้าน $BC > AC$	1. กำหนดให้
2. ΔADC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	2. จากการสร้าง $DC = AC$
3. $\angle DAC = \angle CDA$	3. เป็นมุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4. $\angle BAC > \angle DAC$	4. จากการสร้าง
5. $\angle BAC > \angle CDA$	5. จากข้อ 3, 4
6. $\angle CDA > \angle ABC$	6. $\angle CDA$ เป็นมุมภายนอกใหญ่กว่า $\angle ABC$ ซึ่งเป็นมุมภายในของ ΔABD
7. $\angle BAC > \angle ABC$ หรือ $\angle A > \angle B$	7. จากข้อ 5 และข้อ 6
8. ดังนั้น $BC > AC$ แล้ว $\angle A > \angle B$	8. จากข้อ 1–7

นั่นคือ "ΔABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆและมี $\angle A < \angle B$ แล้ว $BC < AC$"

ตัวอย่างที่ 3

ให้ $f(x)=mx+b,$ เมื่อ $m\neq 0$ ถ้า $x_1\neq x_2$ แล้ว $f(x_1)\neq f(x_2)$

พิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ ข้อความที่สมมูลกับโจทย์คือให้

$f(x)=mx+b,$ เมื่อ $m\neq 0$ ถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ แล้ว $x=x_2$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $f(x_1)=f(x_2)$	1. กำหนดให้
2. $mx_1+b=mx_2+b$	2. แทนค่า ฟังก์ชัน $f(x)=mx+b,$
3. $mx_1=mx_2$	3. บวกด้วย $-b$ ทั้งสองข้าง
4. $x_1=x_2$	4. คูณด้วย $\frac{1}{m}$ ทั้งสองข้าง
5. ดังนั้นถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ แล้ว $x_1=x_2$	5. จากข้อ 1–4
6. สรุปถ้า $x_1\neq x_2$ แล้ว $f(x_1)\neq f(x_2)$	6. $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim q\rightarrow\sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

2.2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction) แบ่งเป็น 2 กรณี คือ

(a) เมื่อข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นข้อความเดี่ยว p

ขั้นตอนการพิสูจน์ ข้อความ p เป็นจริง

1. สมมุติว่า p เป็นเท็จ นั่นคือ p เป็นจริง

2. จากสมมุติฐาน p เป็นจริงนำทฤษฎีเบื้องต้น นิยาม สัจพจน์ ดำเนินการพิสูจน์จนเกิดข้อขัดแย้ง $q\wedge\sim q$ ซึ่งเป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

3. นั่นคือที่กำหนดให้ข้อความ p เป็นจริง (หรือ p เป็นเท็จ) นั้นเป็นการไม่ถูกต้อง

4. สรุปว่าข้อความ p เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 4

ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ "$\log_{10}5$ เป็นจำนวนอตรรกยะ"

นิยาม 2.2.1 Q เป็นเซตของจำนวนตรรกะเมื่อ

$$Q=\left\{\frac{x}{y}/\,x,y\in Z\wedge y\neq 0\right\}$$

นิยาม 2.2.2 "$\log_N M=p$ หมายถึง $N^p=M$

พิสูจน์ให้ "$\log_{10}5$ เป็นจำนวนตรรกยะ"

ข้อความ	เหตุผล
1. $\log_{10}5$ เป็นจำนวนตรรกยะ	1. กำหนดให้
2 $\log_{10}5=\frac{x}{y},x,y$ ไม่มีตัวประกอบร่วมและ $x<y$	2. นิยาม 2.2.1
3. $10^{\frac{x}{y}}=5,\ x,y\in Z^+$	3. นิยาม 2.2.2
4. $10^x=5^y$	4. จากข้อ 3 ยกกำลัง y ทั้งสองข้าง
5. $10^x=5^y$ เป็นข้อขัดแย้ง	5. เนื่องจาก 10^x เป็นจำนวนคู่ 5^y เป็นจำนวนคี่
6. ดังนั้นสรุปว่า"$\log_{10}5$ เป็นจำนวนอตรรกยะ"	6. จากข้อ 1–5 การกำหนด"$\log_{10}5$ เป็นจำนวนตรรกยะ" ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

(b) เมื่อข้อความที่ต้องการพิสูจน์เป็นข้อความ "p → q"

ขั้นตอนการพิสูจน์ ข้อความ "p → q" เป็นจริงโดยใช้ข้อขัดแย้ง

1. สมมุติว่า q เป็นเท็จ นั่นคือ q เป็นจริง

2. ดังนั้นสมมุติฐาน p เป็นจริงและ q เป็นจริง

3. นำทฤษฎีเบื้องต้น นิยาม สัจพจน์ ดำเนินการพิสูจน์จนเกิดข้อขัดแย้ง $q\wedge\sim q$ ซึ่งไม่เป็นจริงพร้อมกัน

4. นั่นคือข้อความถ้า p เป็นจริงแล้ว q เป็นเท็จจึงไม่ถูกต้อง

5. สรุปว่าข้อความ p เป็นจริงแล้ว q เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 5

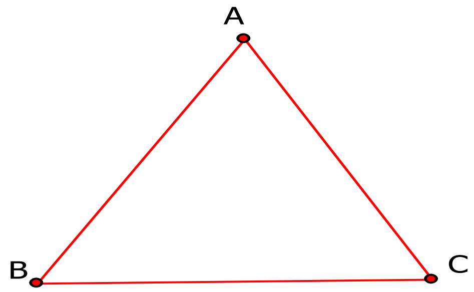
ข้อความที่ต้องการพิสูจน์ "ΔABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีมุม A เป็นมุมยอดแล้ว $\angle ABC$ และ $\angle ACB$ ซึ่งเป็นมุมที่ฐานจะเท่ากัน"

นิยาม 2.2.3 สามเหลี่ยมหน้าจั่วคือสามเหลี่ยมที่มีด้านประกอบมุมยอดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.2.1 ในสามเหลี่ยมใดๆ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านที่เท่ากันย่อมเท่ากัน

สิ่งที่กำหนดให้ ΔABC เป็นสาเหลี่ยมหน้าจั่ว $\angle A$ เป็นมุมยอด

พิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งคือสมมุติให้ $\angle ABC = \angle ACB$ เป็นเท็จนั่นคือ $\angle ABC \neq \angle ACB$ เป็นจริง



สามเหลี่ยมหน้าจั่ว *ABC*

ข้อความ	เหตุผล
1. ΔABC เป็นสาเหลี่ยมหน้าจั่ว	1. กำหนดให้
2. $\angle A$ เป็นมุมยอด	2. กำหนดให้
3. $\angle ABC \neq \angle ACB$	3. สมมุติฐาน
4. เนื่องจากด้าน $AB = AC$	4. เป็นด้านประกอบมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
5. ดังนั้น $\angle ABC = \angle ACB$	5. เป็นมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านที่เท่ากัน
6. ข้อความข้อ 3 และข้อ 5 ขัดแย้งกัน	6. $\angle ABC \neq \angle ACB$ และ $\angle ABC = \angle ACB$
7. สรุปว่า $\angle ABC = \angle ACB$	7. เนื่องจากข้อสมมุติ $\angle ABC \neq \angle ACB$ เป็นเท็จทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

นอกจากวิธีพิสูจน์ทั้งสามรูปแบบดังกล่าวแล้วยังมีข้อความบางรูปแบบที่พิสูจน์โดยอาศัยสมบัติเรื่องความสมมูลและใช้หลักการพิสูจน์ทางตรงและการพิสูจน์ทางอ้อมประกอบกัน คือ

3. การพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกัน $(p \leftrightarrow q)$

เนื่องจาก $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ ดังนั้น การพิสูจน์ $(p \leftrightarrow q)$ จึงใช้ข้อความ $(p \to q) \wedge (q \to p)$ และทำการพิสูจน์ 2 กรณี กรณีที่ 1 จะต้องพิสูจน์ว่า $(p \to q)$ เป็นจริง และกรณีที่ 2 $(q \to p)$ เป็นจริง ซึ่งแต่ละกรณี ใช้การพิสูจน์ของการพิสูจน์ทางตรงและการพิสูจน์ทางอ้อมดังกล่าวแล้ว

ตัวอย่างที่ 6

ให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์เดียวกันจะได้ว่า $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

นิยาม 3.1 $A \subset B \leftrightarrow \forall x[x \in A \to x \in B]$

นิยาม 3.2 $A' = U - A = \{x \in U \wedge x \notin A\}$

แยกการพิสูจน์เป็น 2 กรณี คือ $A \subset B \to B' \subset A'$ และ $B' \subset A' \to A \subset B$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $A \subset B$	1. กำหนดให้
2. $A \subset B \to \forall x[x \in A \to x \in B]$	2. นิยามสับเซต
3. $A \subset B \to \forall x[x \notin B \to x \notin A]$	3. $(q \to p) \leftrightarrow (p \to q)$
4. $A \subset B \to \forall x[x \in B' \to x \in A']$	4. นิยาม 3.2
5. $A \subset B \to B' \subset A'$	5. นิยามสับเซต
6. ทำนองเดียวกันเริ่มจาก $B' \subset A'$	6. กำหนดให้
7. $B' \subset A' \to \forall x[x \in B' \to x \in A']$	7. นิยามสับเซต
8. $B' \subset A' \to \forall x[x \in A \to x \in B]$	8. $(q \to p) \leftrightarrow (p \to q)$
9. $B' \subset A' \to A \subset B$	9. นิยามสับเซต
10. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$	10. จากข้อ 5 และ 9

หมายเหตุ การพิสูจน์อาจเริ่มจาก $A \subset B \leftrightarrow B' \subset A'$ จากนิยาม $A \subset B \to \forall x[x \in A \leftrightarrow x \in B]$

4. การพิสูจน์รายกรณี (Proof by Case)

การพิสูจน์รายกรณีเป็นวิธีพิสูจน์ข้อความในรูป $p \to q$ แต่ข้อความ p เหตุแยกเป็นกรณีย่อยๆ ได้หลายกรณี เช่น $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$ ดังนั้นต้องพิสูจน์ทุกกรณี $(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$ ซึ่งเป็นหลักการของสัจนิรันดร์ $[(p \vee r) \to q] \leftrightarrow (p \to q) \wedge (r \to q)$ จะเห็นได้ว่ากรณีย่อยๆ เป็นรูปแบบของ $p \to q$ วิธีพิสูจน์จึงใช้หลักการพิสูจน์ทางตรงและการพิสูจน์ทางอ้อมดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 7

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จะได้ว่า $|x^2| = |x|^2$ แยกเป็นกรณีย่อยๆ ดังนี้ $x \geq 0 \to |x^2| = |x|^2$ และ $x < 0 \to |x^2| = |x|^2$

นิยาม 4.1 $|x| = \begin{cases} x & when\ x > 0 \\ -x & when\ x < 0 \end{cases}$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1.กรณีที่ 1. $x \geq 0$	1. กำหนดให้
2. $\|x\| = x$ และจะได้ $\|x\|^2 = x^2$	2. นิยามค่าสัมบูรณ์และ
3. $x^2 \geq 0$ และจะได้	กฎทางพีชคณิต
$\|x^2\| = x^2$	3. จากข้อ 1 นิยาม
4. $x \geq 0 \rightarrow \|x^2\| = \|x^2\|$	ค่าสัมบูรณ์
5. กรณีที่ 2 $x < 0$	4. ข้อ 2 และ 3
6. $\|x\| = -x$ และจะได้	ต่างเท่ากับ x^2
$\|x\|^2 = (-x)^2 = x^2$	5. กำหนดให้
7. $x^2 > 0$ และจะได้	6. นิยามค่าสัมบูรณ์
$\|x^2\| = x^2$	และกฎทางพีชคณิต
8. $x < 0 \rightarrow \|x^2\| = \|x\|^2$	7. นิยามค่าสัมบูรณ์
9. สรุป $x \in R \rightarrow \|x^2\| = \|x\|^2$	จาก 5
	8. ข้อ 6 และ 7 ต่าง
	เท่ากับ x^2
	9. จากข้อ 4 และ 8

สรุป

รูปแบบการพิสูจน์ 3 รูปแบบแรก คือ การพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์ทางอ้อม ซึ่งแยกเป็นการพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เป็นการพิสูจน์ที่มีข้อความเหตุเป็นเงื่อนไขเพื่อพิสูจน์ให้ได้ข้อความที่เป็นผล และเมื่อการพิสูจน์ทางตรงมีความซับซ้อนยากต่อการพิสูจน์อาจใช้การพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นทางเลือกหนึ่ง สำหรับการพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกัน และการพิสูจน์เป็นรายกรณีเป็นการผสมผสานระหว่างสมบัติความสมมูลซึ่งเป็นสัจนิรันดร์และการพิสูจน์ทางตรงหรือการพิสูจน์ทางอ้อมดังกล่าว ยังมีวิธีพิสูจน์อื่นๆ อีก เช่น วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์วิธีพิสูจน์ข้อความที่มีวลีบอกปริมาณ ซึ่งจะได้แสดงการพิสูจน์ในโอกาสต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Allan Berele, Jerry Goldman. (2001). *Upper Saddle River*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

David W. Agler. (2013). *Symbolic Logics, Syntax, Semantics, and Proof*. Rowman & Littlefield Publishers, Inc.

Douglas E. Ensley, J. Winston Crawley. (2006). *Discrete Mathematics Mathematical Reasoning and Proof with Puzzles, Patterns, and Games*. Shippensburg University: Wiley John Wiley @Sons Inc.

Herbert B. Enderton. (2001). *A Mathematical Introduction to Logic*. Second Edition. University of California, Los Angeles: 1972 by harcourt/Academic Press.

Kenneth H. Rosen. (2003). *Discrete Mathematics and its Applications*. Fifth Edition. International Edition: Published by Mc Graw-Hill Companies,Inc.

Martin I., Isaacs. (2001). *Geometry for College Students*. 511 Forest Lodge Road USA: Books/Cple Thomson Learning.

Richard Johnson Baugh. (1997). *Discrete Mathematics, Fourth Edition*. DePaul University Chicago, Upper Saddu, River, New Jersey 07458: Prentice Hall International.

Richard Hammack. (2009). *Book of Proof*. Retriteved from http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/BookOfProof.pdf.